Seminar Zahlentheorie – Quadratische Formen

Ulrich Derenthal

Dienstags, 8–10 Uhr, Raum A 410

Übersicht

In diesem Zahlentheorie-Seminar lernen wir das wichtigste Beispiel des Lokal-Global-Prinzips kennen (auch als *Hasse-Prinzip* bekannt): Ob eine quadratische Gleichung in mehreren Variablen nicht-triviale Lösungen über den rationalen Zahlen (einem *globalen* Körper) hat, hängt nach einem Satz von Hasse von der einfacheren Frage nach ihrer Lösbarkeit über den reellen und allen p-adischen Zahlen (*lokalen* Körpern) ab. Zum Beweis benötigen wir unter anderem den Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Folgen.

Im ersten Teil des Seminars spielen algebraische Methoden die wichtigste Rolle, beginnend mit der Definition von p-adischen Zahlen. Für diese Vorträge sind also Vorkenntnisse aus einer Vorlesung über Algebra oder Zahlentheorie hilfreich. Für den zweiten Teil, der den Beweis des Satzes von Dirichlet umfasst, sind dagegen analytische Methoden entscheidend. Diese Vorträge eignen sich besonders für Studierende, die an einer Vorlesung über Funktionentheorie teilgenommen haben.

Wir folgen dem Buch von Serre (im französischen Original [Ser70] oder in der englischen Übersetzung [Ser73]).

Aus dem LUH-Netz / per VPN: `https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4684-9884-4`

Bemerkungen

Anmeldung per e-Mail (`derenthal@math.uni-hannover.de`) oder beim ersten Seminartermin zu Semesterbeginn.

Eine Vorbesprechung ist Pflicht (spätestens in der Vorwoche des Vortrags); dann sollten Sie sich schon intensiv mit den Inhalten auseinandergesetzt haben, und der Vortrag sollte möglichst weit vorbereitet sein. Sprechstunde nach Vereinbarung. Halten Sie Probevorträge. Die Vortragslänge ist 90 Minuten. Alle Teilnehmenden müssen grundsätzlich an allen Vorträgen teilnehmen.

1. Endliche Körper I

[Ser73, I, §1, §2]: Ziel dieses Vortrags ist es, grundlegende Eigenschaften endlicher Körper zusammenzufassen und den Satz von Chevalley–Warning über die Lösbarkeit von Polynomgleichungen, deren Grad kleiner als die Anzahl der Variablen ist, zu formulieren und zu beweisen.

2. Endliche Körper II

[Ser73, I, §3]: In diesem Vortrag wird zunächst das Legendre-Symbol definiert und anschließend das quadratische Reziprozitätsgesetz formuliert und bewiesen. Auch soll an Beispielen erklärt werden, wie sich das Reziprozitätsgesetz zur effizienten Berechnung von Legendre-Symbolen eignet.

3. p-adische Körper I

[Ser73, II, §1, §2.1]: Die p-adischen Zahlen (der Ring $\mathbb{Z}_p$ und der Körper $\mathbb{Q}_p$) werden mit ihren grundlegenden Definitionen und Beispielen eingeführt. Es wird eine Topologie darauf definiert. Der Vortrag endet mit elementaren Sätzen über die Lösbarkeit von Polynomgleichungen in mehreren Variablen über $\mathbb{Z}_p$.

4. p-adische Körper II

[Ser73, II, §2.2, §3]: Dieser Vortrag behandelt fortgeschrittenere Eigenschaften der p-adischen Zahlen. Für Polynomgleichungen über $\mathbb{Z}_p$ geht es darum, von der „näherungsweisen" Lösbarkeit „modulo p^k" auf die Lösbarkeit über $\mathbb{Z}_p$ zu schließen. Außerdem wird die Struktur der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{Q}_p$ analysiert.

5. Das Hilbert-Symbol I

[Ser73, III, §1]: Hilbert-Symbole beschreiben, ob gewisse quadratische Gleichungen lösbar sind. Der erste Vortrag zu diesem Thema befasst sich zunächst mit grundlegenden Eigenschaften. Weiter geht es um „lokale“ Eigenschaften, also die Berechnung von Hilbert-Symbolen über $\mathbb{Q}_p$ (mit Hilfe von Legendre-Symbolen) und $\mathbb{R}$.

6. Das Hilbert-Symbol II

[Ser73, III, §2]: Der zweite Vortrag zu Hilbert-Symbolen befasst sich mit dem Zusammenhang zwischen lokalen (über $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{R}$) und globalen (über $\mathbb{Q}$) Eigenschaften. Man erhält das erste Beispiel einer Lokal-Global-Aussage. Im Beweis wird der Satz von Dirichlet verwendet, der im letzten Vortrag bewiesen wird.

7. Quadratische Formen I

[Ser73, IV, §1]: Im ersten Vortrag über quadratische Formen werden zunächst Eigenschaften wiederholt, die aus der linearen Algebra größtenteils bekannt sind. Es folgen elementare Aussagen über quadratische Formen über endlichen Körpern.

8. Quadratische Formen II

[Ser73, IV, §2]: Zu quadratischen Formen über $\mathbb{Q}_p$ definiert man die *Diskriminante* und eine weitere Invariante, die sich aus Hilbert-Symbolen zusammensetzt. Resultate sind dann die Beschreibung der Lösbarkeit von quadratischen Formen über $\mathbb{Q}_p$ mit Hilfe dieser Invarianten sowie die Klassifikation von quadratischen Formen.

9. Quadratische Formen III

[Ser73, IV, §3.1, §3.2]: In diesem Vortrag wird das Lokal-Global-Hauptresultat des Seminars bewiesen: der Satz von Hasse, der die Lösbarkeit einer quadratischen Form über $\mathbb{Q}$ mit der Lösbarkeit über $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{R}$ in Verbindung bringt.

10. Quadratische Formen IV

[Ser73, IV, §3.3, Appendix]: Als Anwendung des Satzes von Hasse erhält man die Klassifikation von quadratischen Formen über $\mathbb{Q}$. Außerdem wird der Satz von Lagrange, dass sich jede natürliche Zahl als Summe von vier Quadratzahlen schreiben lässt, bewiesen.

11. Satz von Dirichlet I

[Ser73, VI, §1]. Ziel der letzten vier Vorträge ist der Beweis des Satzes von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Folgen. Der erste Vortrag über Charaktere von endlichen abelschen Gruppen ist elementar. Interessante Beispiele für Charaktere der multiplikativen Gruppe von zyklischen Gruppen erhält man mit Hilfe von Legendre-Symbolen.

12. Satz von Dirichlet II

[Ser73, VI, §2]. Für diesen Vortrag über grundlegende Eigenschaften von Dirichlet-Reihen sind Vorkenntnisse aus einer Funktionentheorie-Vorlesung hilfreich.

13. Satz von Dirichlet III

[Ser73, VI, §3]. Zeta- und L-Funktionen sind über Dirichlet-Reihen (und Charaktere) definierte Funktionen. In diesem Vortrag werden ihre Eigenschaften als holomorphe komplexe Funktionen untersucht.

14. Satz von Dirichlet IV

[Ser73, VI, §4]. Das zweite Hauptresultat des Seminars, der Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Folgen, wird bewiesen.

Literatur

[Ser70] J.-P. Serre. *Cours d'arithmétique*, volume 2 of *Collection SUP: "Le Mathématicien"*. Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[Ser73] J.-P. Serre. *A course in arithmetic.* Springer-Verlag, New York, 1973.